Author: Colopen 彩色铅笔
Link: https://www.colopen-blog.com
Download the pdf: [多元函数极值专题.pdf]()
last publication: 2021-12-11 18:00

无条件极值

无条件极值属于多元函数极值中，较为简单的一类问题，其解决的问题描述一般是：

$$\text{给定一个多元函数 } z = f(x, y)\text{，求解他在实数域上的极值}$$

解决该类问题的思路也很简单，直接沿用我们在 **一元函数** 中的手段：通过 **驻点** 找 **极值点**

用 z 对 x, y 分别求 **偏导**，然后令 **一阶偏导数** 为零，找出 **驻点**

如何判断 **驻点** 是否是 **极值点**？ 常用手段是 **黑塞矩阵（Hessian Matrix）判别式**

他是用于研究函数在一点处 **曲率** 的变化而存在的（就像一元函数求二阶导数的行为，本质相同）

黑塞矩阵判别式： $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$

若 **黑塞矩阵判别式** ：

1. 大于 0，则该驻点是极值点
    1. 若 $f_{xx} > 0$ 则为极小值点
    2. 若 $f_{xx} < 0$ 则为极大值点
2. 小于 0，则该驻点不是极值点
3. 等于 0，则 **判别式失效**

    当 **判别式失效** 时，我们可以利用 **极值的定义**，然后通过一个 **二元极限** 判断该点是否是**极值点**

    1. 如果找到两条路径，一条路径极限大于该点值，一条路径极限小于该点值，则非 **极值点**
    2. 如果 **去心邻域** 内的值都大于或小于该驻点的值，则该驻点为**极值点**

关于 **无条件极值**，各大辅导书上步骤都有详细讲解，故这里就不准备例题了，只帮助大家理清思路

条件极值

条件极值 是考研中常考的，方法超固定，计算超复杂的一类问题

条件极值 围绕着 **目标函数**、**约束条件** 两个关键字展开

求解的是 **目标函数** 在 **约束条件** 下的 **极值** 问题

其问题描述一般为：

$$\text{已知函数 } z = f(x, y)\text{，求解 } z \text{ 在约束条件 } D = \{(x, y) | g(x, y) = 0\} \text{ 下的最值}$$

通法 是 **拉格朗日数乘法**：是一种寻找变量受一个或多个条件所限制的多元函数的极值的方法

构造如下方程组：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)\xlongequal{令}0$$

$$\begin{cases}L_x=f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)\xlongequal{令}0\\ \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)\xlongequal{令}0\\ \\ L_\lambda=g_x(x,y)\xlongequal{令}0\end{cases}$$

然后解该方程组，便可以得到 **目标函数** 在 **约束条件** 下的 **极值点**

然后比较几个 **极值点**，选出 **最大最小值** 即可

> 不过 **条件极值** 难，从来都不是难在做法上，而是构造的 **拉格朗日数乘法方程** 难解
>
> 接下来的内容，将会围绕优化解方程出发，分享几个我常用的方法

利用轮换对称式化简拉格朗日乘子

在下方的 **利用齐次式化简拉格朗日乘子** 中介绍过：（这个专题我是从下往上写的 w）

拉格朗日函数 是一个 **多项式函数**，可以利用很多 **多项式的特性** 对计算进行化简

而本篇中，提到的方法便是 **轮换对称式**

> **二元轮换对称式** 的定义：
>
> 对于一个二元多项式 $f(x,y)$，如果用 x 代替 y，用 y 代替 x，后 **代数式** 保持不变，则称 $f(x,y)$ 具有 **轮换对称性**
>
> 上述定义可以扩充到 n 元，此外 **二元轮换对称式** 也是一个 **完全对称式**
>
> 轮换对称性用简单一个点的话来说就是，如果交换 x,y 后，$f(x,y)$ 保持不变

对于具有 **轮换对称性** 的函数，一定有解 $y=x$

因此我们不妨直接让 L_x-L_y 然后提出 $(y-x)$ 的因式

然后分类讨论两个因式分别为 0 的解

【例】设计一个容积为 V 的长方体开口水箱，长宽高分别为多少时最节省材料

【解】根据题意可得 **目标函数:** $S=2xz+2zy+xy$，约束条件 $V=xyz$

构造拉格朗日函数：$L=2xz+2zy+xy+\lambda(xyz-V)$

> 显然 x,y 具有轮换对称性

$$
\begin{cases}
L_x = 2z + y + \lambda yz \overset{令}{=\!=} 0 \\
L_y = 2z + x + \lambda xz \overset{令}{=\!=} 0 \\
L_z = 2x + 2y + \lambda xy \overset{令}{=\!=} 0 \\
L_\lambda = xyz \overset{令}{=\!=} V
\end{cases}
$$

利用轮换对称性，让 $L_x - L_y$ 得：

$$
(y-x) + \lambda z(y-x) = 0
$$

$$
(y-x)\cdot(1+\lambda z) = 0
$$

(1) $x = y$ 时：$L_z: 4x + \lambda x^2 = 0 \Rightarrow x(4+\lambda x) = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{4}{x}$

$L_\lambda: z = \dfrac{V}{x^2}$，$L_x: \dfrac{2V}{x^2} + x - 4\cdot\dfrac{V}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 2V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}$

故 $\begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \\ z = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{2^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$

(2) $1 + \lambda z = 0$ 时：$L_x: -\dfrac{2}{\lambda} + y - y = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{\lambda} = 0$ 无解

由于题目保证一定有解，故最小值解为：$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \\ z = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{2^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$

> 2013年超难解的多元极值问题，就可以利用本技巧化简运算，读者可以去试一下

三角换元法

> 这个方法很简单，本质就是沿用了大家在 **二重积分** 里常用的 **极直互化** 技巧

考虑按照 **约束条件** 的形式，将 **直角坐标** 转化成 **极坐标** 形式

这样就从原来的 $f(x,y)$ 极值问题，转化为 $f(r,\theta)$ 极值问题

由于是基于 **约束条件** 转换的坐标，转化过来后 r,θ 是带着 **约束条件** 的 **取值范围限制**

故 $f(r,\theta)$ 最后可以通过 **三角恒等变形** 化成一个 $ar\sin(\theta+\varphi)$ 的形式

然后就可以根据 r 范围直接写出 f 的 **取值范围**

【例】$4x^2+y^2\le 25$，求 $L=x^2+12xy+2y^2$ 的取值范围

【解】根据 **约束条件** 的形式，进行 **极直互化**

不妨令 $2x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 $r^2\le 25\Rightarrow(0\le r\le 5，0\le\theta\le 2\pi)$

对 **目标函数** 转 **极坐标**：

$$\begin{aligned}L&=x^2+12xy+2y^2\\&=\frac{r^2}{4}\cos^2\theta+6r^2\sin\theta\cos\theta+2r^2\sin^2\theta\\&=\frac{r^2}{4}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+3r^2\sin 2\theta+2r^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\&=\frac{r^2}{8}+\frac{r^2}{8}\cos 2\theta+3r^2\sin 2\theta+r^2-r^2\cos 2\theta\\&=\frac{r^2}{8}\cdot\left(9+24\sin 2\theta-7\cos 2\theta\right)\\&=\frac{r^2}{8}\cdot\left(9+\sqrt{24^2+7^2}\sin\left(2\theta+\varphi\right)\right)\\&=\frac{r^2}{8}\cdot\left(9+25\sin\left(2\theta+\varphi\right)\right)\end{aligned}$$

由于 $\theta\in[0,2\pi],r\in[0,5]$，故 $f(r,\theta)\in[-50,\dfrac{425}{4}]$

> 该方法同样适用于 **三个变量平方和的等式** 下
>
> 由于是等式，故可以选择**两个变量**建立**极坐标**，让**第三个变量**代替 r 作为参数限制
>
> 如下面这题

【例】$x^2+y^2+z^2=10$，求 $L=xy+2yz$ 的取值范围

【解】对 L 进行变形：$L=y\cdot(x+2z)$，考虑围绕 x,z 建立极坐标

对约束条件进行恒等变形：$x^2+z^2=10-y^2$

建立极坐标：$x=\sqrt{10-y^2}\cos\theta,z=\sqrt{10-y^2}\sin\theta$

易得 $-\sqrt{10}\le y<\sqrt{10}$，$0\le\theta\le 2\pi$

对目标函数进行换元：

$$
\begin{aligned}
L &= y \cdot \left(\sqrt{10-y^2}\cos\theta + 2\sqrt{10-y^2}\sin\theta\right) \\
&= y\sqrt{10-y^2}\cdot\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)
\end{aligned}
$$

根据 $y \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$，有 $y\sqrt{10-y^2} \in [-5, 5]$ （读者自证不难）

而 $\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi) \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

故 $L = y\sqrt{10-y^2}\cdot\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi) \in [-5\sqrt{5}, 5\sqrt{5}]$

利用齐次式化简拉格朗日乘子

> 部分参考自 @考研竞赛凯哥，及其他参考文献

> 这一部分，有一些数学知识作为前置铺垫，不过最后得出来的结论相当简单
>
> 如果没有想要了解的想法，只是以考试为主要目的的同学，可以直接往下滑

解 **多元函数条件极值** 问题时，需要用到 **拉格朗日乘数法** 构造 **拉格朗日函数**

$$L(x_1, x_2, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda[g(x_1, x_2, x_3) - m]$$

其中 λ 为参数

由于 λ 是作为参数存在的，故研究 **拉格朗日函数** 实际上是在研究一个 **多项式函数**

而当研究对象转换到 **多项式函数** 后，就可以用到很多 **特殊多项式函数** 的性质

例如，本篇中会介绍的 **齐次函数**（如果该次数是二次型，推荐用下一个二次型解法）

> **k 次式的齐次函数** 的 **定义** 为：$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

对于 k 次 **齐次函数** ，有 **齐次函数** 的 **欧拉定理**：

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

> **简单证明：**
>
> 对于 k 次齐次函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对定义式两边求全微分：
>
> $$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)}\cdot\frac{d(\lambda x_i)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)}$$
>
> $$\frac{d}{d\lambda}\lambda^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k\lambda^{k-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
>
> 通过这个 **算两次** 的思想，由于两个 **全微分** 必相等，于是：
>
> $$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)} = k\lambda^{k-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
>
> 取 $\lambda = 1$，得：
>
> $$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)} = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad QED$$

回到 **多元函数条件极值** 问题上来

若目标函数 f 和约束条件 $g=m$ 满足 f 和 g 是 k 次多项式，那么 $F=f+\lambda g$ 也是 k 次多项式。

对于 **拉格朗日乘子** $L=f+\lambda(g-m)$，$L_x=0,L_y=0$

可以考虑 $xL_x+yL_y=0$，即 $xF_x+yF_y=0$（常数 m 求偏导后被干掉了）

根据 **欧拉定理**，$kF=0$，再根据条件 $g=m$，$kF=0$ 可以进一步化简为 $f=-\lambda m$

因此考虑 f 的最值问题，就化为考虑 $-\lambda m$ 的最值问题

> 理论铺垫多说无益，我们直接来一道实战题目进行讲解
>
> 题选自李林预测卷，我是在群里找来的到的

【例】求中心在坐标原点的椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$ **的长半轴和短半轴长度**

【解】椭圆长/短半轴长度就是椭圆上离中心点最 远/近 的距离长度

故可以目标函数就是 $\sqrt{x^2+y^2}$，但为了化简计算，不妨设目标函数为 x^2+y^2

构造拉格朗日乘数法：$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x-4\lambda y\overset{令}{=\!=}0 \\ \\ L_y=2y+10\lambda y-4\lambda x\overset{令}{=\!=}0 \\ \\ L_\lambda=x^2-4xy+5y^2-1\overset{令}{=\!=}0 \end{cases}$$

考虑使用齐次型化简转化研究对象，让 xL_x+yL_y：

$$2(x^2+y^2)+2\lambda(x^2-4xy+5y^2)=0$$

由于已知约束条件 $x^2-4xy+5y^2=1$，故直接代入上式得：

$$x^2+y^2=-\lambda$$

求 x^2+y^2最值的问题，成功转化为求 $-\lambda$ 最值的问题了

由于 $(x,y)\neq(0,0)$ 否则肯定不满足第三个方程 $L_\lambda(0,0)=-1\neq0$

故一、二两个方程 L_x 和 L_y 一定含有 **非零解**，故他们的 **系数矩阵行列式** = 0：

$$\begin{vmatrix} 2+2\lambda & -4\lambda \\ \\ -4\lambda & 2+10\lambda \end{vmatrix}=4\lambda^2+24\lambda+4=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=-3\pm2\sqrt2$$

由此可知 x^2+y^2 的最大值为 $3+2\sqrt2$，最小值为 $3-2\sqrt2$

对应到 $d=\sqrt{x^2+y^2}$，$d_{min}=\sqrt2-1$，$d_{max}=\sqrt2+1$

利用二次型求解

根据 **线性代数** 知识我们知道，**二次型** 化成 **标准型**，可以通过 **正交变换** 实现

而 **正交变换** 有一个非常好的性质：保向量 **模长** 相等

这样就能利用该 **性质**，把原有的 **约束条件**，运用到新坐标下，产生新的 **约束条件**

适用的题型要求：

1. **目标函数** $f(x_1,x_2,x_3)$ 是二次型
2. **约束条件** g 只含有平方项，形如 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=m$

这样，我们最终要找的 **目标函数** 最值，就分别是该 **二次型矩阵** 的 **最大最小特征值**

> 上述为直接结论，我会在下面这道例题中详细讲解原理

【例】求 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$ **在约束条件** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ **上的最值**

【解】目标函数 是 **二次型**，且 **约束条件** 为 **平方和**，考虑使用 **二次型** 计算

令 **二次型** f 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

求出 A 的 **特征值**，令 $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\\\-1&1-\lambda&0\\\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)$$

故可得特征值：$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

$\lambda=0$ 时：$(A-0\cdot E)\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 时：$(A-2\cdot E)\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ 时：$(A-3\cdot E)\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

故存在 **正交矩阵** $Q=(e_1,e_2,e_3),s.t.\,Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$

故存在 **正交变换** $x=Qy,s.t.\,f(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+3y_3^2$

由于 **正交变换** 是保向量模长的，故 $||x||=||y||\Rightarrow y_1^2+y_2^2+y_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

故原命题就等价于：**目标函数**：$f(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+3y_3^2$ 在 **约束条件**：$y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ 下的最值问题

因此，f 的**最大值**就是把全部**模长**分给**系数最大**的**分量**，**最小值**就是分给**系数最小**的**分量**

> 即我在开头说过的，最大最小特征值

故 $f_{min} = 0, f_{max} = 3$

利用常见不等式求解

这里不会使用额外其他的不等式，我只介绍考研中常用的 **均值不等式** 和 **柯西不等式**

柯西不等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立

均值不等式：

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立

柯西不等式 建立的是 **多项平方和** $\geq$ **多项和** 的不等式

均值不等式 建立的是 **多项平方和** $\geq$ **多项积** 的不等式

一个是 **平方和** 到 **和**，一个是 **平方和** 到 **积**，这是我们考虑使用不等式时，首先要考虑的问题

【2018年19题】将 $2m$ 的铁丝分成三段，依次围城圆、正方形、正三角形。三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

【解】令铁丝分给三个图形的长度分别为 a, b, c，则 $a + b + c = 2$

通过已知周长分别计算出三个图形的面积，应为：$\dfrac{a^2}{4\pi}, \dfrac{b^2}{16}, \dfrac{c^2}{12\sqrt{3}}$

故 $S = \dfrac{a^2}{4\pi} + \dfrac{b^2}{16} + \dfrac{c^2}{12\sqrt{3}}$

原命题就等价于，**目标函数** 为 $S(a, b, c)$，在 **约束条件** $a + b + c = 2$ 下的最小值

目标函数是 **多项平方和**，约束条件是 **多项和**，考虑选用 **柯西不等式** 放缩

构造柯西不等式：

$$\left[(\frac{a}{2\sqrt{\pi}})^2 + (\frac{b}{4})^2 + (\frac{c}{\sqrt{12\sqrt{3}}})^2\right] \cdot \left[(2\sqrt{\pi})^2 + 4^2 + (\sqrt{12\sqrt{3}})^2\right] \geq (a + b + c)^2$$

$$S \cdot \left[4\pi + 16 + 12\sqrt{3}\right] \geq 4$$

$$\frac{4}{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}} \leq S$$

$$\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \leq S$$

故 $S_{min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，当且仅当 $\dfrac{a}{4\pi}=\dfrac{b}{16}=\dfrac{c}{12\sqrt{3}}$ 时等号成立

【2021年数一】设 x,y,z，满足 $\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\ \\ 4x+2y+z=30\end{cases}$，求 z 的取值范围

【解】目标函数 z，约束条件 $\begin{cases}x^2+2y^2=z+6\\ \\ 4x+2y=30-z\end{cases}$

(1) 式左侧是 **多项平方和**，(2) 式左侧式 **多项和** 考虑 **柯西不等式** 放缩

构造 **柯西不等式**：

$$(x^2+(\sqrt{2}y)^2)\cdot(4^2+(\sqrt{2})^2)\geq(4x+2y)^2$$

$$(z+6)\cdot 18\geq(30-z)^2$$

$$z^2-78z+792\leq 0$$

$$(z-12)(z-66)\leq 0$$

故 $z\in[12,66]$